

DIFICULTADES EN LAS ECUACIONES LINEALES EN SEGUNDO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Ponciano Hernández Hernández y Eugenio Filloy Yagüe
DME, Cinvestav-IPN.
phernandezh@cinvestav.mx, poncyher@hotmail.com

México

Resumen. Este artículo forma parte de la investigación de maestría, se enfoca a las dificultades que presentan los estudiantes al expresar algebraicamente una situación problema de ecuaciones lineales. Se aplicó un cuestionario a 32 estudiantes de 13 a 14 años de edad de segundo grado de secundaria, consistió en seis reactivos de las ecuaciones de la forma: $a + x = b$ y $ax = b$, como resultados de este, la mayoría de las respuestas fueron dadas en forma aritmética sin hacer uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) Algebraicos, además hubo respuestas incorrectas por el tipo de operación usada, esto se debe a la falta de comprensión de texto en una situación problema. De acuerdo al análisis de los resultados del cuestionario aplicado se identificaron diferentes dominios de los SMS aritméticos/algebraicos por lo que se clasificó por niveles de desempeño acorde a las respuestas dadas en el cuestionario: nivel de desempeño alto, medio y bajo y se entrevistó a un estudiante de cada nivel para clarificar sus respuestas.

Palabras clave: dificultades, ecuaciones lineales, situación problema

Abstract. This article is part of a master's research. It focuses on the difficulties presented by the students to algebraically express a linear equation the situation problem. An questionnaire was applied to 32 student thirteen to fourteen year old students in their 2nd year of secondary. The test consisted of six equations using the form: $a + x = b$ and $ax = b$. Because of this, most of the answers were given in arithmetic, expressed not of Mathematical Systems of Signs (MSS) algebraic, and there incorrect, answers because of mistakes in operations, which was due to lack of understanding of the text in situation of problems. Afterwards, according to the analysis of the results, different domains of arithmetic/algebraic were identified and classified into the following levels of performance: high, medium and low and interviewed a student from each level to clarify their answers.

Key words: difficulties, linear equations, problem situation

Introducción

Una de las grandes dificultades que presentan los alumnos en la educación secundaria es la transición de la aritmética al álgebra, en el primer curso de este nivel educativo se introduce este contenido por lo que es nuevo para ellos (SEP, 2011, p. 33), no tienen familiarización alguno; en la educación primaria se hace uso de las letras en el uso de fórmulas para cálculo de áreas y perímetros sin embargo este uso no es en el sentido algebraico sino como número general. Esta investigación se realizó con un grupo de segundo grado de secundaria la cual el ciclo escolar pasado se introdujo el álgebra, por lo que se espera que no manifiesten muchas dificultades para expresar algebraicamente una situación problema y puedan resolverlo.

Esta investigación forma parte de una más amplia acerca de la comprensión del lenguaje algebraico en ecuaciones lineales en primero y segundo grado de secundaria, cuyo objetivo es identificar las dificultades que presentan los alumnos en el tratamiento de las ecuaciones lineales en segundo grado de educación secundaria, al expresar algebraicamente una situación problema de las ecuaciones de la forma $a + x = b$ y $ax = b$. Uno de los propósitos de los actuales planes y

programas de estudio para este nivel educativo es que “el alumno modele y resuelva problemas que implican el uso de ecuaciones de primer grado” (SEP, 2011, p. 14); sin embargo, ése es un proceso en el que surgen varias dificultades de comprensión. La pregunta que rige esta investigación es: ¿qué caracteriza a la comprensión de los alumnos de las ecuaciones lineales cuando se inician en el estudio del lenguaje algebraico mediante la estrategia de solución de problemas aritméticos/algebraicos?

Marco teórico

Diversas investigaciones en álgebra educativa hacen referencia al concepto metodológico de modelos teóricos locales, en los que “el objeto de estudio se enfoca desde cuatro componentes interrelacionadas: modelos de enseñanza, modelos de procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación” (Filloy, 1999, p. 4).

En la componente de procesos cognitivos se consideran sus manifestaciones de la realización de formas de pensamiento matemático, como el uso de la memoria, las concepciones heurísticas utilizadas en la solución de problemas, la generalización y la abstracción que, además, requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS). En la componente de enseñanza sobre los modelajes concreto y sintáctico. En sus recursos didácticos a utilizar en el desarrollo de esta componente, se propone modelar contextos concretos familiares al alumno, para que ante las nuevas operaciones y los nuevos objetos los dote de sentido, construya los primeros rudimentos de sintaxis algebraica y aprenda a tratar la incógnita en los procesos de abstracción y generalización de operaciones (Filloy, 1999), que requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

Respecto a los signos empleados en el álgebra elemental en la educación secundaria, Ursini, S; Escareño, F; Montes, D; Trigueros, M. señalan que “Las letras o variables tienen tres distintos usos, como: incógnita específica, número general o una relación funcional” (2005, p.15). En esta investigación hará referencia a la letra como incógnita específica en donde se plantearán situaciones problemas a los estudiantes, ellos tendrán que expresarlo en una ecuación lineal y resolverlo usando los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, mediante el despeje de la incógnita, por los conocimientos previos.

Método

Nos enfocamos en la componente de procesos cognitivos y en el uso de la variable como incógnita específica, a la cual el estudiante daría un sentido en su representación simbólica, en la solución de problemas aritméticos/algebraicos.

La investigación se realizó en una escuela secundaria pública mexicana, con un grupo de 32 estudiantes de 13 a 14 años de edad de segundo grado de secundaria. Con el objetivo de identificar las dificultades que exhiben los alumnos al representar algebraicamente una situación problema y las distintas formas que siguen para solucionarla, se aplicó un cuestionario al grupo, referente a la solución de problemas aritméticos/algebraicos, con un total de seis reactivos sobre ecuaciones lineales de la forma $a + x = b$ (cuatro reactivos) y $ax = b$ (dos reactivos). Los reactivos se presentaron en lengua natural, como preguntas abiertas, impresos en papel para su contestación individual escrita, durante 40 minutos como máximo en el aula de la clase de matemáticas y sin el uso de la calculadora. Posteriormente se realizaron entrevistas acerca de situaciones problema familiares al alumno, para clarificar las respuestas al cuestionario de tres estudiantes, seleccionados por el tipo de desempeño mostrado en él: uno con desempeño alto, que obtuvo correctamente todos los reactivos y representó algebraicamente las situaciones dadas; otro con desempeño medio, con sólo tres reactivos correctos del tipo $a + x = b$ y con respuestas en forma aritmética; y un alumno con desempeño bajo, sin un solo acierto, que presentó nociones de igualdad, de incógnita y que expresó en forma aritmética las situaciones presentadas.

Tipos de reactivos. Los seis reactivos plantearon preguntas abiertas referentes a ecuaciones lineales; fueron los siguientes:

Resuelve y comprueba cada una de las siguientes situaciones

1. *Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?*
2. *Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?*
3. *Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos. ¿Cuál era el saldo anterior?*
4. *Carla fue a un restaurante con su amiga. Pidió la cuenta, la cual era de 250.50 pesos más un impuesto de 37.575 pesos. Si pagó con un billete de 500 pesos. ¿Cuánto le dieron de cambio?*
5. *El perímetro de un heptágono regular es de 45.5 cm. ¿cuánto mide cada uno de los lados?*
6. *El precio de 6 computadoras es de 82 800 pesos. ¿Cuánto cuesta cada computadora? Considerando que tienen el mismo precio.*

Estos reactivos se diseñaron con el apoyo del libro de texto: Matemáticas I, educación secundaria “inducción a las competencias” (Arriaga, A. 2008, p. 141). Los primeros cuatro reactivos hacen

referencia a las ecuaciones de la forma: $a + x = b$, los dos primeros son muy similares con el mismo nivel de dificultad solo cambian los datos en la que se espera que los alumnos no presenten dificultades para representarlo algebraicamente y solucionarla. El tercer reactivo es una situación problema que se resuelve con el mismo tipo de ecuación, sin embargo con un grado de dificultad mayor que las anteriores por lo que el alumno puede confundir la operación correcta a elegir para responder correctamente. El reactivo siguiente es una situación problema que se resuelve con una ecuación de la forma $a + x = b$; sin embargo es el de más alto grado de dificultad por los datos implícitos, por lo que se puede manifestar dificultades para su contestación por la comprensión de texto y elijan una operación incorrecta para resolverla, también puede darse el caso de que no usen todos los datos que se encuentra en este reactivo.

Finalmente en los dos últimos reactivos hace referencia a las ecuaciones de la forma $ax = b$; los dos reactivos son muy similares solo difieren en los datos, en el caso del reactivo cinco, implica que hagan uso de la memoria para recordar conceptos matemáticos. Finalmente el último reactivo es similar al anterior por el tipo de ecuación solo difiere en los datos.

Con estos reactivos se analizará cada una de las respuestas de los alumnos para discernir las posibles causas que originan las dificultades de comprensión en las ecuaciones lineales y determinar si las solución de situaciones problema ayuda a comprender o a tener más dificultades para la comprensión del lenguaje algebraico en las ecuaciones lineales para alumnos de segundo grado de educación secundaria.

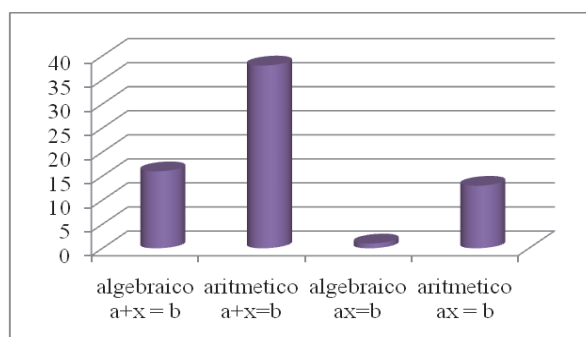
Para la revisión de este instrumento y la interpretación de los datos se implementaron las siguientes categorías de respuesta: Correcto, Noción, Mal y No Contestó. Se consideró respuesta correcta para los alumnos que respondieron utilizando el lenguaje algebraico, sin embargo se consideró también respuesta correcta para aquellos alumnos que encontraron el resultado en la situación problema aunque de forma aritmética. Además de estas respuestas, hubo alumnos que no lograron llegar al resultado, sin embargo identificaron la incógnita, el procedimiento fue el correcto, pero por algún error del valor posicional del número el resultado fue incorrecto por lo tanto se considera al alumno que tiene una noción del contenido de ecuaciones de primer grado. Se considera respuesta incorrecta en la que el alumno responde mal, puede ser por la falta de comprensión de texto y elige una operación incorrecta, finalmente existen reactivos que no tiene ninguna respuesta, por lo que se denomina no contestó.

En el análisis del cuestionario se hizo una clasificación de acuerdo a las respuestas que dieron los alumnos: nivel de desempeño alto quienes respondieron a lo más cercano al dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, nivel de desempeño medio para

aquellos que exhibieron dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y el de nivel de desempeño bajo para aquel que exhibió dificultades para responder correctamente los reactivos debido a la falta de comprensión de texto, errores en el valor posicional de los números y poco dominio de las operaciones básicas.

Resultados

En la gráfica 1 muestra el tipo de respuesta proporcionado por los alumnos, como se puede observar contestaron en forma aritmética en las situaciones problema, se considera que el alumno recurre a los conocimientos previos, tiene un dominio de la aritmética por lo que se considera que hay comprensión de texto; sin embargo no recurre al lenguaje algebraico aunque en el curso anterior en primer grado de secundaria se introdujo el álgebra.



Gráfica 1: Tipo de respuesta aritmético y algebraico

En la figura 1 muestra la respuesta de un estudiante clasificado de nivel de desempeño alto, cierto dominio de comprensión de texto en la situación problema; sin embargo tiene errores de sintaxis ya que en la respuesta escribe en dos ocasiones el signo igual, además está incompleta la respuesta porque no escribe de qué unidad de medida se trata. En el caso del uso de la variable expresa correctamente la incógnita con una variable y hace uso de este para hacer el despeje hallando el valor de la incógnita.

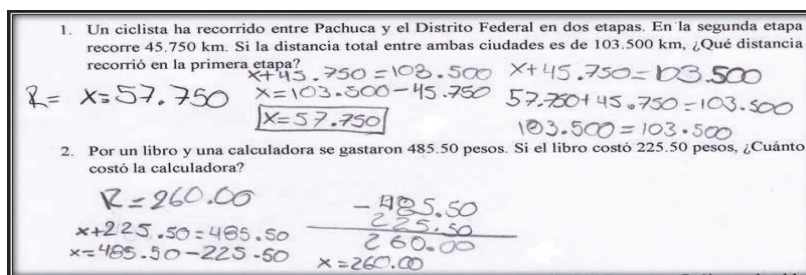


Figura 1: Uso de la variable, errores de sintaxis e incompleto

En la figura 2 el alumno elige correctamente la operación a realizar, eso indica que hay comprensión de texto en esta situación problema sin embargo responde incorrectamente por la

falta de atención al valor posicional en los números, se exhibe claramente la falta de dominio en las operaciones básicas en este caso la resta, donde no realiza correctamente esta operación básica, en las decenas y centenas aplica la operación de restar al número mayor sin importar el papel que juega el sustraendo y minuendo. Además se exhibe errores de sintaxis algebraica ya que no plantea bien la ecuación, usa los datos pertinentes pero la ecuación no corresponde. Cabe mencionar que esta respuesta lo dio un alumno con nivel de desempeño medio haciendo uso de los Sistemas matemáticos de Signos Algebraicos, sin embargo tiene errores de sintaxis algebraica y el valor posicional de los números.

3. Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos. ¿Cuál era el saldo anterior?

$$x + 6325 = 2450$$

$$x = 2450 - 6325$$

$$x = 4135$$

$$\begin{array}{r} 6325 \\ - 2450 \\ \hline 4135 \end{array}$$

Figura 2: Falta de atención al valor posicional de los números

La figura 3 y 4 el alumno solo usa la aritmética para responder, no usa el álgebra. En la figura 3 se considera que existe un cierto dominio de comprensión de texto ya que usa los datos que contiene la situación problema, además realiza la operación precisa, para hallar el resultado; sin embargo en el proceso comete errores de valor posicional de los números, no hace correctamente la resta por lo que no obtiene el resultado deseado. En la figura 4 se exhibe lo que responde un estudiante en la cual es correcto, sin embargo solo hace uso de la aritmética para hallar el resultado, existe comprensión de texto en esta situación problema.

3. Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos. ¿Cuál era el saldo anterior?

$$\begin{array}{r} 6325 \\ - 2450 \\ \hline 1875 \end{array}$$

$$x = 2450$$

Figura 3: Falta de uso de SMS Algebraicos y errores en valor posicional de los números

6. El precio de 6 computadoras es de 82 800 pesos. ¿Cuánto cuesta cada computadora? Considerando que tienen el mismo precio

$$\begin{array}{r} 13800 \\ 6 \overline{) 82800} \\ \underline{6} \\ 22 \\ \underline{18} \\ 4000 \\ \underline{36} \\ 4800 \\ \underline{48} \\ 000 \end{array}$$

$$x = 13800$$

Figura 4: Uso de conocimientos previos para la solución de situaciones problemas

Finalmente de este cuestionario, la figura 5 muestra lo que responde un alumno clasificado de nivel de desempeño bajo el escaso dominio de los SMS Aritméticos/algebraicos, además la falta de comprensión de texto exhibiendo el desconocimiento de las operaciones a realizar, no hace uso de todos los datos que presenta la situación problema y elige la operación incorrecta. Esto

dificulta introducirse en la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado.

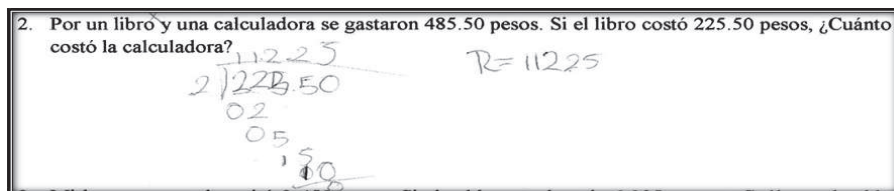


Figura 5: Falta de comprensión de texto en la situación problema

De las respuestas correctas de las ecuaciones de la forma $a + x = b$ y del tipo $ax = b$, sólo en 25% de los alumnos que presentó el cuestionario se evidenció familiarización con el Sistema Matemático de Signos algebraicos, pues en el resto se usó el de los aritméticos. Uno de cada dos alumnos tuvo incorrecto al menos un reactivo por el tipo de operación usada; incluso, un alumno usó la división en lugar de la resta, pero otro que seleccionó la operación correcta respondió incorrectamente por falta de atención al valor posicional de los números. Para los reactivos del tipo $a + x = b$, 42% de las respuestas fueron correctas, de las cuales en 16% se representó algebraicamente la situación problema y en las del 84% restante sólo se realizó una operación aritmética. Los reactivos del tipo $ax = b$ fueron más difíciles; 21% fueron contestados acertadamente, de los cuales sólo un estudiante lo representó algebraicamente; 79% de las respuestas exhibieron operaciones erróneas o no fueron contestadas.

La utilización de una operación incorrecta al responder la situación problema indicó la dificultad para comprender su enunciado. Mientras que el tratamiento deficiente del valor posicional en las cantidades implicadas en la operación, identificada correctamente, dio lugar a resultados incorrectos en el 15% del total de respuestas.

De acuerdo a la pregunta de investigación planteada desde un inicio se dan algunas respuestas como las dificultades que tienen los alumnos a la falta de uso de los SMS aritméticos/algebraicos, al no poder representar algebraicamente una situación problema por falta de uso de la incógnita, no logran plantear una ecuación.

Las entrevistas

El Objetivo de las entrevistas fue identificar las dificultades en la comprensión de una situación problema, su representación y solución algebraica de las “ecuaciones de primer grado”. En particular identificar dificultades para la representación y solución algebraica de las ecuaciones de la forma $x + a = b$.

El alumno entrevistado con desempeño alto identificó con facilidad la incógnita en el enunciado planteado y la representó con una letra; expresó con una ecuación la situación problema y dominó el uso de los SMS aritméticos/algebraicos, le dio sentido al uso de la letra en la ecuación como número desconocido y con su despeje encontró el valor de la incógnita. El estudiante con desempeño medio mostró dificultades para representar el valor desconocido en la situación problema; pero durante el interrogatorio logró identificarlo y representarlo en una ecuación, sin dar sentido a la letra como incógnita, sino sólo para realizar las operaciones aritméticas y resolver la situación dada. Finalmente, el estudiante entrevistado con desempeño bajo, mostró algunas nociones de igualdad, de incógnita y expresó en forma aritmética las situaciones presentadas en el cuestionario, no identificó claramente la operación a realizar, cometió errores del algoritmo a seguir y del valor posicional de los números, por lo que en un primer momento no pudo representar; sin embargo, con preguntas que apelaron a sus conocimientos previos a lo largo de la entrevista, al final logró expresar algebraicamente la ecuación y resolverla, aunque sin un uso fluido del lenguaje algebraico en la solución de situaciones problema de ecuaciones lineales

Comentarios

De acuerdo al análisis de los resultados del cuestionario aplicado referente a las dificultades que presentan los estudiantes al expresar algebraicamente una ecuación lineal de una situación problema, se manifiesta el poco dominio de comprensión de texto lo que dificulta elegir la operación correcta para responder la situación problema, la falta de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, los errores que cometen en el valor posicional de los números; estas son las principales dificultades que manifiestan los estudiantes de este grupo al que se hizo la investigación, se considera que el tratamiento de las ecuaciones lineales a través de la solución de situaciones problema permite el desarrollo de procesos cognitivos, como el uso de la memoria, las concepciones heurísticas utilizadas en la solución de problemas, la generalización y la abstracción que, además, requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

Referencias bibliográficas

- Arriaga, A. (2008). *Matemáticas I, inducción a las competencias*. México. Conaliteg.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.
- SEP, (2011). *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio*. México: Conaliteg.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.